

Bremsformel für Elektronen relativistischer Geschwindigkeit.

Von **H. Bethe**, zurzeit in Rom.

(Eingegangen am 4. Mai 1932.)

Aus der Theorie von Møller¹⁾ wird der Energieverlust von Elektronen relativistischer Geschwindigkeit beim Durchgang durch Materie abgeleitet. Der Energieverlust pro Zentimeter Weg erreicht bei etwa 96 % der Lichtgeschwindigkeit ein Minimum und steigt bei höheren Geschwindigkeiten wieder an; für Elektronen von einigen Milliarden Volt beträgt er etwa 4 Millionen Volt pro Zentimeter Wasser. Eine Tabelle des theoretischen Energieverlustes von Elektronen und Protonen verschiedener Geschwindigkeit wird gegeben.

1. Bis vor kurzem war es nicht möglich, die Streuung von Elektronen sehr hoher Geschwindigkeit quantenmechanisch zu behandeln, weil die bekannten Ansätze für die Wechselwirkungsenergie zweier Elektronen²⁾ nur bis zur Größenordnung v^2/c^2 exakt waren (v = Elektronen-, c = Lichtgeschwindigkeit). Inzwischen hat Møller¹⁾ in einer wichtigen Arbeit die Frage der Wechselwirkungsenergie sehr einfach und befriedigend geklärt, und es ist nunmehr möglich, die Bremsformel für beliebig rasche Elektronen anzugeben, was für die Deutung der Experimente über die korpuskulare Höhenstrahlung von Wichtigkeit ist.

Ein Teilchen der Ladung ez möge sich mit der Geschwindigkeit v durch eine Substanz hindurchbewegen, welche in der Volumeneinheit N Atome der Ordnungszahl Z enthält. Dann verliert das Teilchen pro Zentimeter Weg die Energie

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{2\pi e^4 N Z z^2}{m v^2} \left(\lg \frac{2 m v^2 W}{\bar{E}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (1)$$

falls wir nur den Energieverlust durch solche Stöße ins Auge fassen, bei denen im einzelnen höchstens die Energie W auf das Atom übertragen wird³⁾. m ist die Ruhmasse des Elektrons (*nicht* allgemein des stoßenden Teilchens), \bar{E} die mittlere Anregungsenergie des Atoms, definiert durch

$$Z \lg \bar{E} = \sum_{nl} f_{nl} \lg A_{nl}, \quad (2)$$

¹⁾ Chr. Møller, ZS. f. Phys. **70**, 786, 1931.

²⁾ G. Breit, Phys. Rev. **34**, 553, 1929; J. A. Gaunt, Proc. Roy. Soc. **122**, 513, 1929.

³⁾ Ist das stoßende Teilchen ein Elektron, so ist es sehr unwahrscheinlich, daß es bei einem Stoß etwa ein Viertel oder gar die Hälfte der gesamten Energie

f_{nl} ist die Summe der Oszillatorstärken für alle optischen Übergänge, bei denen ein Elektron der Schale nl des Atoms angeregt wird, f_{nl} ist etwas größer oder etwas kleiner als die Anzahl Elektronen in der Schale nl , je nachdem, ob es sich um eine äußere oder innere Schale handelt¹⁾. A_{nl} ist die mittlere Anregungsenergie für die Schale nl und kann genügend genau gleich der Ionisierungsspannung dieser Schale gesetzt werden. Numerisch ergibt sich für

H_2	N_2	Fe	Ag	Pb
$\bar{E} = 15$	35	60	170	250 Volt

Diese Zahlen sind etwa um $\pm 30\%$ unsicher (wegen der Unsicherheit der Oszillatorstärken der durch das Pauliprinzip verbotenen Übergänge), was aber für das Bremsvermögen nichts Wesentliches ausmacht.

2. Die Ableitung der Bremsformel wollen wir hier nur kurz andeuten, da die ausführliche Ableitung, wie wir erfahren, demnächst von Møller veröffentlicht werden wird.

Vor dem Stoß möge der Impuls des stoßenden Elektrons p , seine Energie E sein. Dann ist seine Diracsche Eigenfunktion

$$\psi = \varphi(p) e^{\frac{2\pi i}{h}(p\mathfrak{R} - Et)}, \quad (3)$$

wobei $\varphi(p)$ vier Komponenten $\varphi_1 \dots \varphi_4$ hat, welche nur vom Impuls und der Spinrichtung, dagegen nicht vom Ort \mathfrak{R} des Elektrons abhängen. Um die Wahrscheinlichkeit des Stoßes zu berechnen, hat man nun nach Møller aus den Eigenfunktionen des stoßenden Elektrons vor und nach dem Stoß die Ladungs- und Stromdichte zu bilden:

$$\left. \begin{aligned} q &= -e \psi^*(p') \psi(p) = -e a_0(p p') e^{\frac{2\pi i}{h}[(p-p', \mathfrak{R}) - (E-E')t]}, \\ j &= -ec a(p p') e^{\frac{2\pi i}{h}[(p-p', \mathfrak{R}) - (E-E')t]}, \\ \text{mit} \quad a_0 &= \varphi^*(p') \varphi(p), \quad a = -\varphi^*(p') \vec{\alpha} \varphi(p) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

verliert, nur wenige Prozent aller Elektronen erleiden auf ihrem Wege derartig harte Stöße. Man mißt im allgemeinen den *wahrscheinlichsten* Energieverlust auf einer bestimmten Strecke Δx (bzw. die wahrscheinlichste Reichweite). Man muß dann für W den Energieverlust einsetzen, der auf der Strecke Δx im Mittel gerade einmal passiert (Begründung siehe N. Bohr, Phil. Mag. **30**, 581, 1915): $W = 2\pi Ne^4 Z \Delta x / mv^2$. Bei der Berechnung der Tabelle am Ende ist für Δx die Reichweite eingesetzt, übrigens hängt (1) nicht sehr stark von W ab. — Für schwere stoßende Teilchen ist W gleich der maximal übertragbaren Energie („Zentraler Stoß“), d. i. $W = 2mv^2$.

¹⁾ H. Bethe, Ann. d. Phys. **5**, 325, § 11.

(E' , \mathbf{p}' = Energie und Impuls nach dem Stoß, $\vec{\alpha}$ = Diracscher Operator). Hierauf hat man das Viererpotential zu berechnen, welches von dieser Ladungs- und Stromverteilung erzeugt wird, und hat dieses Viererpotential als Störung aufzufassen, welche auf das gestoßene Atom wirkt. Dann erhält man nach der üblichen Bornschen Störungsrechnung als Wahrscheinlichkeit für einen Stoß, bei dem das stoßende Elektron um den Winkel ϑ in den Winkelbereich $d\omega$ abgelenkt und das Atom aus dem Grundzustand (Energie E_0 , Eigenfunktion ψ_0) in den n -ten Zustand angeregt wird:

$$d\Phi_n = \frac{4e^4 p'}{c^4 p} \frac{E E' d\omega}{[(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 - (E-E')^2/c^2]} \left| \int \psi_n^*(\mathbf{r}) \sum_j e^{\frac{2\pi i}{h}(\mathbf{p}-\mathbf{p}', \mathbf{r}_j)} (\alpha_0 + \alpha \vec{\alpha}_j) \psi_0(\mathbf{r}) d\tau \right|^2 \quad (5)$$

Das Integral in (5) ist nur über die Koordinaten der Atomelektronen zu erstrecken. Der Diracsche Operator $\vec{\alpha}_j$ wirkt auf die Spinkoordinate des j -ten Atomelektrons.

In der nichtrelativistischen Stoßformel¹⁾ steht an Stelle der Größe a_0 einfach 1, doch ist auch im relativistischen Falle $a_0 = 1$ für alle Stöße, bei denen die Ablenkung des stoßenden Elektrons nicht sehr groß ist. Ferner tritt bei relativistischer Rechnung die Wirkung des Vektorpotentials (magnetische Kräfte) neu hinzu, welches in unserer Formel durch α repräsentiert wird, und es ist die Retardierung der Wechselwirkungspotentiale zu berücksichtigen: Diese bewirkt den Zusatzterm $(E - E')^2/c^2 = (E_n - E_0)^2/c^2$ im Nenner von (5).

Solange das Atom beim Stoß eine Energie erhält, welche klein ist gegen die Ruhenergie mc^2 des Elektrons, kann man für ψ_0 und ψ_n die Schrödingerschen anstatt der Diracschen Eigenfunktionen setzen. Man darf jedoch *nicht*, wie das zunächst naheläge, die Wirkung des Vektorpotentials vernachlässigen: Gerade bei den Stößen, bei denen das stoßende Elektron überhaupt nicht abgelenkt wird, ist der Beitrag des Gliedes mit α in (5) fast genau entgegengesetzt gleich dem des skalaren Potentials: Man bekommt einen um den Faktor $(E/mc^2)^2$ zu großen Wirkungsquerschnitt, wenn man das Vektorpotential wegläßt.

Man kann bei kleinem Ablenkungswinkel setzen: $a_0 = 1$, $\alpha = \mathbf{v}/c$ (\mathbf{v} = Geschwindigkeit des stoßenden Elektrons), ferner ist wegen der kleinen Geschwindigkeit der Atomelektronen

$$\int \psi_n^* \vec{\alpha}_j \psi_0 d\tau = -\mathbf{v}_{0n}^j/c = \frac{2\pi i}{hc} \cdot \mathbf{r}_{0n}^j (E_n - E_0),$$

¹⁾ H. Bethe, l. c., § 4.

wo v_{0n}^j das Matrixelement der Geschwindigkeit, r_{0n}^j dasjenige der Koordinate des j -ten Atomelektrons bezeichnet. Endlich kann man noch die Exponentialfunktion in (5) entwickeln und die Entwicklung nach dem ersten Gliede abbrechen, welches einen nichtverschwindenden Beitrag zum Integral gibt¹⁾. Dann wird das Integral in (5):

$$J_n = \frac{2\pi i}{h} \int \psi_n^* \sum_j \left(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \frac{E_n - E_0}{c^2} \mathbf{v}, \mathbf{r}_j \right) \psi_0 d\tau$$

$$= \frac{2\pi i}{h} x_{0n} \left| \mathbf{p} - \mathbf{p}' - \frac{E_n - E_0}{E} \mathbf{p} \right|. \quad (6)$$

x_{0n} ist das elektrische Dipolmoment, welches dem Übergang $0 \rightarrow n$ entspricht, $|x_{0n}|^2$ ist also bis auf einen Faktor die optische Übergangswahrscheinlichkeit.

Geometrische Betrachtungen ergeben

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - \frac{(E_n - E_0)^2}{c^2} &= 2 \left(p^2 - \frac{E(E_n - E_0)}{c^2} \right) (1 - \cos \vartheta) + (E_n - E_0)^2 \frac{m^2}{p^2} \cos \vartheta + \dots \\ \left(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \frac{E_n - E_0}{E} \mathbf{p} \right)^2 &= 2 \left(p^2 - \frac{E_n - E_0}{E c^2} (2E^2 - m^2 c^4) \right) (1 - \cos \vartheta) \\ &\quad + (E_n - E_0)^2 \frac{m^4 c^4}{E^2 p^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Wir können nun (6) und (7) in (5) einsetzen und über den Winkel ϑ integrieren. Die obere Grenze der Integration, ϑ_0 , wählen wir dabei einerseits so klein, daß wir, unserer Voraussetzung entsprechend, die Exponentialfunktion in (5) noch entwickeln dürfen, andererseits so groß, daß die Ausdrücke (7) praktisch nur noch vom Ablenkungswinkel ϑ und nicht mehr von der übertragenen Anregungsenergie $E_n - E_0$ abhängen; die beiden Bedingungen sind miteinander verträglich. Die Integration gibt

$$\int_0^{\vartheta_0} d\vartheta \Phi_n(\vartheta) = \frac{2\pi e^4 z^2}{m v^2 \cdot R y} |x_{0n}|^2 \left(\lg \frac{2 p^4 (1 - \cos \vartheta_0)}{m^2 (E_n - E_0)^2} - \frac{c^2 p^2}{E^2} \right)$$

$$= \frac{2\pi e^4 z^2}{m v^2 \cdot R y} |x_{0n}|^2 \left(\lg \frac{2 m v^2 W(\vartheta_0)}{(E_n - E_0)^2 (1 - v^2/c^2)} - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (8)$$

¹⁾ Dies ist das konstante Glied 1 für den Teil des Integrals, der das Vektorpotential enthält, hingegen das nächste Glied $\frac{2\pi i}{h} (\mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{r}_j)$ für den vom skalaren Potential herrührenden Anteil. Dies ist der Grund dafür, daß der Beitrag des Vektorpotentials von der gleichen Größenordnung wird wie der des skalaren.

Dabei ist $W(\vartheta_0) = \frac{p^2}{m} (1 - \cos \vartheta_0)$ die Energie, welche das Primärelektron bei einer Ablenkung um den Winkel ϑ_0 nach dem Energieimpulssatz auf ein *freies* Sekundärelektron übertragen würde, $Ry = \text{Rydberg-Energie}$. Das Zusatzglied $-v^2/c^2$ außerhalb des Logarithmus rührt davon her, daß durch die Wirkung des Vektorpotentials die Anzahl *der* Stöße vermindert wird, bei denen das Elektron nur verzögert und nicht abgelenkt wird ($\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ parallel \mathbf{p} , $\vartheta = 0$). Die Stöße *mit* Ablenkung des Elektrons werden dagegen *häufiger*, als man für die gleiche Geschwindigkeit bei nicht-relativistischer Rechnung erwarten würde; das äußert sich in dem Zusatzfaktor $1 - v^2/c^2$ im Nenner des Logarithmus. Wie man sieht, erhält man bei ausschließlicher Berücksichtigung der Stöße unter *kleinem* Winkel bereits die *vollständige* Korrektur, durch die sich die Bremsformel (1) von der entsprechenden nichtrelativistischen Formel unterscheidet.

Bei größeren Ablenkungswinkeln ändert sich nämlich gar nichts. Nehmen wir zunächst an, die auf das Atom übertragene Anregungsenergie sei noch klein gegen mc^2 . Dann darf man weiterhin Schrödingersche Eigenfunktionen benutzen und außerdem nunmehr auch das Vektorpotential und die Retardierung vernachlässigen, wie man sich leicht durch eine Überschlagsrechnung überzeugt. Dann geht (5) *genau* in die nicht-relativistische Formel über. Bei sehr harten Stößen (Energieübertragung vergleichbar mit mc^2 oder größer) muß man dann natürlich exakt mit Diracschen Eigenfunktionen rechnen: Doch kann man auch hier die Rechnung noch vereinfachen, weil man in diesem Falle die Bindung des gestoßenen Elektrons an das Atom vernachlässigen darf; seine Eigenfunktion wird also vor dem Stoß die eines ruhenden, freien Elektrons, nach dem Stoß die eines freien Elektrons mit dem Impuls $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$. Die explizite Rechnung zeigt dann, daß auch für die harten Stöße genau die klassische (nicht-relativistische) Formel für die Stoßwahrscheinlichkeit herauskommt. Damit ist dann gezeigt, daß nur die Stöße mit kleiner Ablenkung eine Änderung der Bremsformel bewirken.

Auf die Winkelverteilung der gestreuten Elektronen und auf die Anregungswahrscheinlichkeiten der verschiedenen Niveaus wollen wir nicht eingehen, da dies in der erwähnten Arbeit von Møller geschehen wird. Wir möchten nur darauf hinweisen, daß sich die Anregungswahrscheinlichkeit der diskreten Energieniveaus relativ zur Ionisierungswahrscheinlichkeit mit wachsender Energie des Primärelektrons ein wenig *vergrößert* — entgegen der anschaulichen Erwartung, aber im Einklang mit den von mir früher angegebenen Formeln (l. c., § 10). Der Energieverbrauch pro gebildetes

Ion nimmt also etwas zu, schätzungsweise um 30 bis 40 %, wenn die Energie des Primärelektrons von 10000 auf eine Milliarde Volt steigt.

3. Formel (1) wurde bereits von Williams¹⁾ angegeben: Er nahm einfach an, daß sich die relativistische quantentheoretische Formel von der klassisch relativistischen²⁾ ebenso unterscheiden würde wie die entsprechenden unrelativistischen Formeln. Er konnte auch zeigen, daß (1) für alle Geschwindigkeiten, für die überhaupt Experimente vorliegen (bis zu 96 % der Lichtgeschwindigkeit) in guter Übereinstimmung mit dem Experiment ist.

Wie auch Williams bemerkt hat, nimmt nach (1) der Energieverlust des stoßenden Elektrons pro Zentimeter Weg als Funktion der Energie nicht dauernd ab, wie man das bei Extrapolation aus den Experimenten bei nichtrelativistischer Geschwindigkeit erwarten würde: Der Energieverlust erreicht vielmehr bei 96¹/₂ % der Lichtgeschwindigkeit (1¹/₂ Millionen Volt Energie) ein Minimum (etwa 2 Millionen Volt pro Kubikzentimeter Wasser) und steigt dann wieder an. Elektronen von einigen Milliarden Volt, wie wir sie in den Korpuskularstrahlen der Höhenstrahlung vermutlich vor uns haben, verlieren pro Kubikzentimeter Wasser 3¹/₂ bis 4 Millionen Volt, erleiden also ein Mehrfaches des gewöhnlich angenommenen Energieverlustes von 1 Million Volt. Wenn ihre Flugrichtung einen Winkel von 45° gegen die Vertikale bildet, müssen sie also 6 Milliarden Volt Energie besitzen, um die Atmosphäre zu durchdringen, was eventuell den negativen Ausfall einer Reihe von magnetischen Ablenkungsexperimenten eher verstehen läßt als die bisher angenommene Energie von 2 Milliarden Volt.

In der folgenden Tabelle verzeichnen wir für verschiedene Anfangsenergien den Energieverlust von Elektronen in Wasser und Blei und von Protonen in Wasser. Das Bremsvermögen pro Masseneinheit ist, wie man

Tabelle 1. Energieverlust schneller Elektronen und Protonen.

Energie Volt	Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$		Energieverlust (Millionen Volt pro Gramm/cm ²)		
			Elektronen		Protonen
	Elektronen	Protonen	in Wasser	in Blei	in Wasser
10 ⁴	0,20	—	25,5	10,0	—
10 ⁵	0,55	—	4,55	2,2	—
10 ⁶	0,94	0,046	2,05	1,10	500
10 ⁷	0,9988	0,146	2,31	1,35	70
10 ⁸	0,9488	0,42	2,90	1,76	10,2
10 ⁹	0,9688	0,875	3,46	2,17	3,02
10 ¹⁰	0,9888	0,997	4,02	2,56	2,94

¹⁾ E. J. Williams, Proc. Roy. Soc. London (A) **135**, 108, 1932.

²⁾ N. Bohr, Phil. Mag. **30**, 581, 1915.

sieht, für Pb wesentlich kleiner als für H_2O , einmal deshalb, weil die Anzahl bremsender Elektronen pro Gramm kleiner ist (Ordnungszahl durch Atomgewicht gleich 0,56 für H_2O , 0,40 für Pb), und zweitens wegen der höheren Anregungsenergie schwerer Atome. *Protonen* werden stärker gebremst als Elektronen gleicher Energie, solange ihre Geschwindigkeit noch nicht vergleichbar ist mit der Lichtgeschwindigkeit, bei Energien von einigen Milliarden Volt kehrt sich das Verhältnis um¹⁾. Schließlich sei noch bemerkt, daß bei sehr hoher Energie die Reichweite von Elektronen und Protonen rund ein *Sechstel* der mittleren Reichweite von Protonen gleicher Energie ist, falls man die letztere als die Strecke definiert, auf der die Intensität eines Lichtstrahles nach der Klein-Nishinaschen Formel auf $1/e$ der Anfangsintensität abgeklungen ist.

¹⁾ Aus diesem Grunde ist es unmöglich, daß es sich bei den starken Ionisationsstößen von Steinke (ZS.f. Phys. 75, 115, 1932) etwa um einzelne Protonen handeln kann. Einerseits ergibt sich aus der Anzahl der gebildeten Ionen (häufig $4 \cdot 10^6$, bisweilen noch mehr) eine Mindestenergie von 10^8 Volt für die Protonen. Protonen dieser Energie würden aber im Ionisationsgefäß von Steinke (250 cm Luftäquivalent = 0,32 ccm Wasser) nur 3,3 Millionen Volt Energie verlieren, also höchstens 130 000 Ionen bilden. α -Teilchen kämen eher in Frage: bei ihnen ist wegen der doppelten Ladung und vierfachen Masse der Energieverlust bei gleicher Anfangsenergie 16mal so groß, d. h. 50 Millionen Volt bei 100 Millionen Anfangsenergie. Um allerdings die stärksten Ausschläge von Steinke zu erklären, muß man anscheinend annehmen, daß mehrere oder noch größere Atomtrümmer aus den Pb ausgelöst werden und gleichzeitig die Ionisationskammer durchqueren.